Многомерный комплексный анализ 14.10.2011

1. Точка x компактной римановой поверхности X рода g называется точкой Вейерштрасса, если на X существует непостоянная мероморфная функция f, голоморфная в $X \setminus \{x\}$ и с полюсом порядка не выше g в точке x. Найдите 12 точек Вейерштрасса на $X \subset \mathbb{P}^2$, заданной в однородных координатах уравнением $z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 = 0$.

2. Определите характеристическое многообразие дифференциального оператора $P = z\frac{\partial^2}{\partial z^2} + w\frac{\partial^2}{\partial z \partial w} + a\frac{\partial^2}{\partial w^2}$, где $a \in \mathbb{C}$. Приведите пример решения уравнения $Pf = 0$ с нетривиальной монодромией.

3. Для комплексного числа τ с ненулевой мнимой частью рассмотрим тор $X = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$. Для гладкой 1-формы $\psi = f dz + g d\bar{z}$ на X положим $M(\psi) = M(f)dz + M(g)d\bar{z}$, где

$$M(f) = \left(\int_X f(z) dz \wedge d\bar{z}\right) \Big/ \left(\int_X dz \wedge d\bar{z}\right).$$

Покажите, что если ψ является d-замкнутой, то $\psi - M(\psi)$ является d-точной.